Tema 4: Aplicaciones lineales

Ejercicios

1. Estudia la linealidad de las siguientes aplicaciones:

   (a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definida por $f(x,y) = (x+y, x-y, x)$.
   (b) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $f(x) = (-3x, 2x)$.
   (c) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $f(x,y) = (x+y, 1)$.
   (d) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x,y) = xy$.
   (e) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $f(x,y) = (x\cos\phi - y \operatorname{sen}\phi, x\operatorname{sen}\phi + y\cos\phi)$, con $0 \leq \phi < 2\pi$.
   (f) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, definida por $f(a,b,c) = a + bx + cx^2$.

2. Estudia la linealidad de las siguientes aplicaciones:

   (a) $f : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \left\{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \,:\, A = A^t\right\}$, definida por $f(A) = \frac{A+A^t}{2}$ (A^t es la matriz traspuesta de A).
   (b) $f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \left\{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \,:\, A = A^t\right\}$, definida por $f(A) = AA^t$.
   (c) $f : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, definida por $f(p(x)) = p(x+1)$.
   (d) $f : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, definida por $f(p(x)) = p(x) + 1$.

3. Prueba que las siguientes aplicaciones, definidas sobre el espacio vectorial de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, son lineales. Obtén la imagen y el núcleo de cada una de ellas.

   (a) $f(p(x)) = p'(x)$ (b) $g(p(x)) = \displaystyle\int_0^x p(t)\,dt$

4. Sean $f, g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definidas por

   (a) $f(1,-1,0) = (2,1)$, $f(0,-1,2) = (1,1)$, $f(3,0,1) = (0,3)$.
   (b) $g(1,-1,0) = (2,1)$, $g(0,-1,2) = (1,1)$, $g(1,-2,2) = (-1,4)$, $g(3,0,1) = (0,3)$.

   Averigua si son homomorfismos y, en caso afirmativo, si son monomorfismo, epimorfismo o isomorfismo.

5. Sea $f : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida sobre el conjunto

   $$\left\{\mathbf{p}_1 = 1 + x^2 + 2x^3,\ \mathbf{p}_2 = 1 + x,\ \mathbf{p}_3 = 1 + x^3,\ \mathbf{p}_4 = x - x^3\right\}$$

   como $f(\mathbf{p}_1) = x - 1$, $f(\mathbf{p}_2) = 1 + 3x^2$, $f(\mathbf{p}_3) = x^2$ y $f(\mathbf{p}_4) = 1$.

   (a) ¿Es aplicación lineal?
   (b) ¿Existe una aplicación lineal $g : L(\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}) \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ tal que $g(\mathbf{p}_1) = 2x - 3$, $g(\mathbf{p}_2) = x^2 - 1$, $g(\mathbf{p}_3) = 1 + x$?
   (c) Extiende la aplicación g a una aplicación lineal $h : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ tal que $h(\mathbf{p}_i) = g(\mathbf{p}_i)$, $i = 1,2,3$, y $\operatorname{Ker} h = L(\left\{1 + x + x^2\right\})$.

6. Halla una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) : x+z=0\}$, $f(1,0,0)$ sea proporcional a $(0,0,1)$ y $f \circ f = f$. ¿Es f única?

7. Halla una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$\operatorname{Ker} f = L\left(\{(2,1,0,1),(0,1,3,0)\}\right) \qquad \operatorname{Im} f = L\left(\{(0,1,2),(1,1,0)\}\right)$$

8. Halla una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$\operatorname{Ker} f = L\left(\{(0,0,1)\}\right) \qquad \operatorname{Im} f = L\left(\{(1,0,1),(1,1,-1),(2,1,0)\}\right)$$

9. En $\mathbb{R}^3$ se consideran los subespacios $S = L\left(\{(0,1,0),(1,1,0)\}\right)$ y $T = L\left(\{(1,0,1)\}\right)$.
   (a) Expresa cada vector $\mathbf{u} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ como suma de un vector $\mathbf{u}_S \in S$ y otro $\mathbf{u}_T \in T$.
   (b) Demuestra que la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definida por $f(\mathbf{u}) = \mathbf{u}_S$ es lineal.
   (c) Si L es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ de dimensión 2, ¿cuál es la dimensión de $f(L)$?

10. (a) Sean $f, g : V \longrightarrow V$ aplicaciones lineales. Prueba que $\operatorname{Ker}(g \circ f) = f^{-1}(\ker g \cap \operatorname{Im} f)$.
    (b) Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f(x,y,z) = (x+2z, x+3y, 3y-2z)$. Obtén una base de $f^{-1}(\ker f \cap \operatorname{Im} f)$.

11. Sea $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ una base de V, y f y g dos endomorfismos sobre V definidos por

$$\left\{\begin{array}{l} f(\mathbf{v}_1) = -3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \\ f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} g(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \\ g(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1 \end{array}\right.$$

    Encuentra las matrices, respecto de la base B, asociadas a f, g, $f \circ g$, $g \circ f$ y $2f^2 - 3g^2$.

12. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal cuya matriz, respecto de la base canónica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, es $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calcula $f(\mathbf{e}_1)$, $f(\mathbf{e}_2)$, $f(\mathbf{e}_3)$ y $f(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3)$. ¿Es un isomorfismo?

13. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal cuya matriz, respecto de la base canónica es $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Encuentra bases de la imagen y del núcleo.

14. Encuentra la matriz, respecto de las bases usuales en los correspondientes espacios, de las siguientes aplicaciones lineales:
    (a) $f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})$, definida por $f(A) = A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
    (b) $f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, definida por $f(A) = A\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A$.

(c) $f : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, definida por $f(1) = x^2 + 1$, $f(x) = x + 2$, $f(x^2) = x^3 - x$ y $f(x^3) = 1$.

(d) $f : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $f(p(x)) = \left(p(1),\ \int_0^1 p(x)\,dx\right)$.

15. Sea $f : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por $f(a + bx + cx^2 + dx^3) = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c-d & a-b \end{pmatrix}$. Obtén la matriz de la aplicación lineal, su imagen y su núcleo.

16. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal de ecuaciones $\left\{\begin{array}{l} y_1 = x + 2z \\ y_2 = -x - y - z \\ y_3 = 2y - 3z \\ y_4 = x - z \end{array}\right.$

(a) Halla las ecuaciones paramétricas e implícitas de $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$.

(b) Si $T = L\left(\{(1,1,-1,0),(0,1,1,2)\}\right)$, halla las ecuaciones paramétricas e implícitas de $f^{-1}(T)$.

17. Sean $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y $g : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ las aplicaciones definidas por

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 & x_2 \\ x_2 & x_2 - x_3 \end{pmatrix} \qquad\qquad g(A) = \begin{pmatrix} 1 & x \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix}$$

(a) Prueba que son aplicaciones lineales.

(b) Halla sus matrices respecto de las bases usuales. ¿Cuáles son sus rangos?

(c) Halla sus núcleos e imágenes.

(d) Halla la matriz de $g \circ f$, su rango, y su núcleo e imagen.

18. En $\mathbb{R}^3$ se define el endomorfismo f cuya matriz, respecto de la base canónica, es $A_a = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$.

(a) Halla los valores de a para los que f no es automorfismo. En estos casos, halla bases del núcleo y de la imagen.

(b) Para $a = 2$, encuentra un vector $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ tal que $f(\mathbf{u}) \in L(\{\mathbf{u}\})$.

19. Sea M el subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definido por

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha + \beta & 2\alpha - \beta \\ -\alpha & \alpha + 2\beta \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

(a) Construye $f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\operatorname{Ker} f = M$.

(b) ¿Existe $f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que verifique (a) y sea epimorfismo?

20. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que $f(0,0,-1) = (2,-5,-3)$ y $f(\mathbf{v}) = 3\mathbf{v}$, para todo $\mathbf{v} \in S = \{(x,y,z) : x + z = 0\}$. Halla su matriz respecto de la base canónica y $f^{-1}(r)$ donde r es la recta de ecuaciones $\left\{\begin{array}{l} 2x + 4y + 3z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{array}\right.$.

21. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal definida por la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

    (a) Halla el valor de a para que $(1, a, -a, 0) \in \operatorname{Im} f$.

    (b) Halla $f^{-1}(1, 0, 0, 0)$.

    (c) En $\mathbb{R}^3$ se considera el subespacio vectorial U generado por la base $B_1 = \{(1,1,1), (1,1,0)\}$ y en $\mathbb{R}^4$ el subespacio vectorial V generado por la base $B_2 = \{(1,0,0,-1), (1,1,1,-1), (2,0,-1,1)\}$. Halla la matriz de $f : U \longrightarrow V$ respecto de las bases dadas.

22. Halla las matrices del cambio de base de B_1 a B_2 en los siguientes casos:

    (a) $B_1 = \{(1,-1), (3,1)\}$ y $B_2 = \{(1,0), (0,1)\}$.

    (b) $B_1 = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ y $B_2 = \{(2,3,4), (1,2,6), (1,3,5)\}$.

23. Sea V un espacio vectorial de dimensión 3 sobre $\mathbb{R}$, y sean $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ y $B' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ dos bases de V relacionadas por las ecuaciones:

    $$\mathbf{e}'_1 = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \qquad \mathbf{e}'_2 = -\mathbf{e}_2 \qquad \mathbf{e}'_3 = 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$$

    Encuentra los vectores de V que tienen las mismas coordenadas respecto de ambas bases.

24. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que: $f(1,1,1) = (1,1,0)$, $f(-1,1,1) = (0,0,1)$ y $f(-1,-2,1) = (0,0,0)$.

    (a) Halla su matriz respecto de la base canónica.

    (b) Halla su matriz respecto de la base $B = \{((1,1,1), (-1,1,1), (-1,-2,1)\}$.

25. Sean $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $S = L(\{A, B, C\})$ y $g : S \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida por $g(A) = x$, $g(B) = x^2 + 1$ y $g(C) = x^2 + x + 1$.

    (a) Halla bases del núcleo e imagen de g. Halla las ecuaciones de g respecto de las bases $B_1 = \{A, B, C\}$ y $B_2 = \{1, x, x^2\}$, y respecto de las bases $B_3 = \left\{A, B, E = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ y $B_4 = \{x, x^2 + 1, 1\}$.

    (b) Estudia si existe algún homomorfismo $f : S \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ tal que $f(A) = x$, $f(B) = x^2 + 1$, $f(C) = x^2 + x + 1$ y $f(D) = 2x^2 + x$.

26. Sea $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

    $$\begin{aligned} f(\mathbf{e}_1) + f(\mathbf{e}_2) &= a\mathbf{e}_1 + (a+1)\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\ f(\mathbf{e}_1) + f(\mathbf{e}_3) &= -\mathbf{e}_1 + a\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 \\ f(\mathbf{e}_3) &= -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

    (a) Halla la matriz de f respecto de B. ¿Para qué valores de a es f biyectiva?

(b) Para $a = 1$ se considera el subespacio vectorial $W = L(\{(1,1,0),(2,0,1)\})$. ¿Es $\operatorname{Ker} f \oplus W = \mathbb{R}^3$? ¿Es $\operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f = \mathbb{R}^3$? Calcula $f^{-1}(-2,-2,0)$.

(c) Para $a = 2$, sea $B' = \{\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_3, \mathbf{u}_3 = 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\}$. Prueba que B' es base y halla la matriz de f respecto de B'.

27. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que $\dim(\operatorname{Im} f) = 1$, las ecuaciones del $\operatorname{Ker} f$ respecto de la base $B' = \{\mathbf{u}_1 = (1,0,0), \mathbf{u}_2 = (1,1,0), \mathbf{u}_3 = (1,1,1)\}$ son $\begin{cases} x' + y' = 0 \\ ax' - y' + (a+1)z' = 0 \end{cases}$, y tal que existe $\mathbf{v} = (b,0,0) \neq (0,0,0)$ verificando que $f(\mathbf{v}) = f^2(\mathbf{v}) = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$. Halla las ecuaciones de f respecto de la base canónica.

28. Sea $f_k : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal cuya matriz respecto de la base canónica es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & k & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$.

(a) ¿Para qué valores de k es f_k isomorfismo?

(b) Halla, si es posible, bases respecto de las cuales la matriz de f_1 es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) Halla $f^{-1}(S)$ donde $S = L(\{(2,1,-1),(-3,2,1)\})$.

29. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal y $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ la base canónica. Sabiendo que $\dim(\operatorname{Ker} f) = 2$, $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \in \operatorname{Im} f$, $f^2 = f$ y que la matriz de f respecto de B coincide con la matriz de f respecto de $B' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, siendo B' la base de $\mathbb{R}^3$ tal que $\mathbf{u}_1 = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, $\mathbf{u}_2 = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{u}_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$.

(a) Halla la matriz de f respecto de B.

(b) Halla las ecuaciones implícitas de $\operatorname{Ker} f$ y de $\operatorname{Im} f$.

30. Sea $f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ la aplicación lineal definida por

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a(x + x^2) + bx + dx^2$$

(a) Halla la matriz de f respecto de las bases usuales.

(b) Halla una base de $\operatorname{Im} f$, y un suplementario de $\operatorname{Im} f$ en $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

(c) Halla una base de $S = \operatorname{Ker} f$, un suplementario T de S en $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, y escribe la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ como suma de una de S y otra de T.

(d) Comprueba que $B = \left\{ M_1 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de S y halla las coordenadas de $M_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ respecto de dicha base.

(e) Amplía la base $B = \{M_1, M_2\}$ a una base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, de forma que las dos primeras coordenadas de M_1, M_2 y M_3 respecto de dicha base sean nulas.

(f) Halla $f^{-1}\left(L\left(\{3x + 4x^2\}\right)\right)$.

31. Sean $U = L(\{(1,1,1,0),(0,1,1,1),(1,0,0,1)\})$, $V = L(\{(0,0,0,1),(-1,1,-1,0)\})$ y $f : U \longrightarrow V$ definida por $f(1,1,1,0) = (0,0,0,1)$, $f(0,1,1,1) = (-1,1,-1,1)$ y $f(1,0,0,1) = (0,0,0,0)$.
    (a) Obtén bases de U y V de forma que al colocar los vectores de dichas bases como filas de una matriz, se obtenga una forma canónica por filas.
    (b) Halla la matriz de f respecto de las bases obtenidas en el apartado anterior.

Soluciones

1. (a), (b), (e) y (f) son aplicaciones lineales, mientras que (c) y (d) no lo son.
2. (a) y (c) son aplicaciones lineales, mientras que (b) y (d) no lo son.
3. (a) $\operatorname{Im} f = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ y $\operatorname{Ker} f = \mathcal{P}_0(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
   (b) $\operatorname{Im} f = \{q(x) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \,:\, q(0) = 0\}$ y $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}$.
4. f es epimorfismo, y g no es homomorfismo.
5. (a) No, pues $\mathbf{p}_4 = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3$ y $f(\mathbf{p}_4) \neq f(\mathbf{p}_2) - f(\mathbf{p}_3)$.
   (b) Si, pues $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ es base del subespacio que generan.
   (c) h viene definida sobre la base $B = \left\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4 = x^3\right\}$ como $h(\mathbf{p}_i) = g(\mathbf{p}_i)$, $i = 1,2,3$, y $h(\mathbf{p}_4) = -5 + x + x^2$.
6. Es única: $f(1,0,-1) = f(0,1,0) = \mathbf{0}$ y $f(1,0,0) = (0,0,1)$.
7. No es única. Por ejemplo: $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -6 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$.
8. Respecto de la base canónica: $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
9. (a) $\mathbf{u}_S = (x - z, y, 0)$ y $\mathbf{u}_T = (z, 0, z)$. (b) Es lineal.
   (c) La dimensión de $f(L)$ es 1 (si $T \subset L$) o 2 (si $T \cap L = \{\mathbf{0}\}$).
10. (b) $\{(6,-2,-3)\}$.
11. $M(f) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $M(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M(f \circ g) = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M(g \circ f) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ y $M(2f^2 - 3g^2) = \begin{pmatrix} 14 & -11 \\ -11 & 1 \end{pmatrix}$.
12. $f(\mathbf{e}_1) = (1,0,2)$, $f(\mathbf{e}_2) = (3,1,-1)$, $f(\mathbf{e}_3) = (2,1,0)$ y $f(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) = (5,1,0)$. Es un isomorfismo.
13. $\{(1,1,-1),(0,1,1)\}$ es base de la imagen y $\{(1,-1,2)\}$ del núcleo.

14. (a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. (b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

    (d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \end{pmatrix}$.

15. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\operatorname{Im} f = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \alpha+\beta \\ \gamma & \alpha-\beta \end{pmatrix} : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$; $\operatorname{Ker} f = L\left(\{x^2 + x^3\}\right)$.

16. (a) $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}$.

    $\operatorname{Im} f$: $\left\{ \begin{array}{l} y_1 = \alpha \\ y_2 = -\alpha + \beta \\ y_3 = -2\beta + \gamma \\ y_4 = \alpha + 3\gamma \end{array} \right.$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$; $7y_1 + 6y_2 + 3y_3 - y_4 = 0$.

    (b) $f^{-1}(T)$: $\left\{ \begin{array}{l} x = 11\alpha \\ y = -5\alpha \\ z = -9\alpha \end{array} \right.$, $\alpha \in \mathbb{R}$; $\left\{ \begin{array}{l} 3x + 3y + 2z = 0 \\ 5x + 2y + 5z = 0 \end{array} \right.$.

17. (b) $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $M(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\operatorname{rg} M(f) = \operatorname{rg} M(g) = 3$.

    (c) $\operatorname{Im} f = L\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right)$; y $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}$.

    $\operatorname{Im} g = L\left(\{x, x^2, x^3\}\right)$; y $\operatorname{Ker} g = L\left(\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \right)$.

    (d) $M(g \circ f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $\operatorname{rg} M(g \circ f) = 3$; $\operatorname{Im}(g \circ f) = L\left(\{x, x^2, x^3\}\right)$; y $\operatorname{Ker}(g \circ f) = \{\mathbf{0}\}$.

18. (a) $a = 1$ y $a = -2$. Para $a = 1$, $B_{\operatorname{Im} f} = \{(1,1,1)\}$ y $B_{\operatorname{Ker} f} = \{(1,-1,0), (1,0,-1)\}$. Para $a = -2$, $B_{\operatorname{Im} f} = \{(1,1,-2), (0,1,-1)\}$ y $B_{\operatorname{Ker} f} = \{(1,1,1)\}$. (b) $\mathbf{u} = (1,-1,0)$.

19. (a) No es única. Por ejemplo: $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \left(0, \frac{a+b}{3} + c, \frac{-5a+b}{3} + d\right)$; (b) No.

20. $M(f, B_c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 5 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; y $f^{-1}(r) = L\left(\{(6,-11,0)\}\right)$.

21. (a) $a = 1/5$; (b) $f^{-1}(1,0,0,0) = \emptyset$; (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

22. (a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; (b) $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -1 & -1 \\ 3 & -6 & 3 \\ -10 & 8 & -1 \end{pmatrix}$.

23. $\{\mathbf{u} = (0, \alpha, \alpha) \,:\, \alpha \in \mathbb{R}\}$.

24. (a) $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; (b) $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

25. (a) $B_{\mathrm{Im}\, g} = \left\{x, 1+x^2\right\}$ y $B_{\mathrm{Ker}\, g} = \left\{\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\right\}$.

    $g \,:\, (a,b,c)_{B_1} \longrightarrow (\alpha,\beta,\gamma)_{B_2}$ con $\left\{\begin{array}{l} \alpha = b+c \\ \beta = a+c \\ \gamma = b+c \end{array}\right.$.

    $g \,:\, (a,b,e)_{B_3} \longrightarrow (\alpha,\beta,\gamma)_{B_4}$ con $\left\{\begin{array}{l} \alpha = a \\ \beta = b \\ \gamma = 0 \end{array}\right.$.

    (b) No existe.

26. (a) $M(f,B) = \begin{pmatrix} 0 & a & -1 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; f es biyectiva si $a \neq \pm 1$.

    (b) $\mathrm{Ker}\, f \oplus W = \mathbb{R}^3$ y $\mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}^3$; $f^{-1}(-2,-2,0) = (0,-2,0) + \mathrm{Ker}\, f$.

    (c) $M(f,B') = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & -2 & 6 \\ 3 & 3 & -3 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

27. $f(x,y,z) = \left(\frac{3x-3z}{2}, x-z, \frac{x-z}{2}\right)$.

28. (a) $k \neq 1$. (b) $B_1 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 = (1,1,-1)\}$ y $B_2 = \{f(\mathbf{u}_1), f(\mathbf{u}_2), \mathbf{v}_3\}$.
    (c) $f^{-1}(S) = L\left(\{(3,8,0),(-5,0,8)\}\right)$.

29. (a) $M(f,B) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

    (b) $\mathrm{Im}\, f \equiv \left\{\begin{array}{r} x+y=0 \\ z=0 \end{array}\right.$; $\mathrm{Ker}\, f \equiv x-y=0$.

30. (a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

    (b) $B_{\mathrm{Im}\, f} = \left\{x, x^2\right\}$. $L(\{1\})$ es suplementario de $\mathrm{Im}\, f$ en $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

    (c) $B_S = \left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ y, por ejemplo, $B_T = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$. En este caso: $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$.

    (d) $M_3 = -\frac{1}{2}M_1 + 3M_2 = (-1/2, 3)_B$.

(e) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, M_1, M_2 \right\}$.

(f) $f^{-1}\left(L\left(\left\{3x+4x^2\right\}\right)\right) = L\left(\left\{ \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}\right)$.

31. (a) $B_U = \{(1,0,0,0),(0,1,1,0),(0,0,0,1)\}$ y $B_V = \{(1,-1,1,0),(0,0,0,1)\}$.

(b) $M(f, B_U, B_V) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.